

## **Bilaga 1: Sammanfattningar av de arton ingående studierna**

**Ayalon, M., & Even, R. (2016). Factors Shaping Students' Opportunities to Engage in Argumentative Activity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(3), 575–601.**

Studien fokuserar på hur de matematiska resonemangen i fyra olika klasser skiljer sig och visar vad det betyder för elevernas deltagande. Klasserna undervisas av två olika lärare och matematikinnehållet skiljer sig mellan lektionerna.

### **Deltagare**

Elever i fyra olika klasser i åk 7 och två lärare. Då studien inleds skiljer sig klasserna åt när det gäller deltagande, motivation och disciplinära problem. De två lärarna är utvalda för att de skiljer sig i syn på lärarens roll för att stödja utvecklingen av elevers förmåga att resonera matematiskt. Den ena läraren menar att läraren ska uppmuntra elever att motivera sina idéer och lyssna på andra elevers argument etc., medan den andra läraren menar att elevers förmåga att resonera utvecklas spontant som ett resultat av att de ägnar sig åt matematik.

### **Underlag**

Nitton videoinspelade lektioner av ordinarie undervisning i helklass, varav fyra spelades in i två av klasserna, fem i en klass och sex i en klass. Även inspelade intervjuer med lärarna.

### **Resultat**

Ayalon resonerar om tre nyckelfaktorer vilka har betydelse för elevernas möjligheter att engagera sig i matematiken i klassrummet: a) matematikinnehållet, b) läraren, c) klassen, samt relationen mellan dessa tre faktorer.

Resultatet visar att samspelet mellan innehållet som det framträder i läroboken, klassen, och läraren inte bara fokuserar ämnet utan även stärker den argumenterande aktiviteten som eleverna ägnar sig åt. Den argumenterande verksamheten stärks genom att det förekommer olika argumenterande handlingar i samspelet. Ayalon ger följande exempel på handlingar som läraren och eleverna kan ägna sig åt för att öva på att argumentera och motivera sina lösningar på matematiska problem.

- efterfråga en lösning på ett matematiskt problem
- ge en lösning
- uppmana till att utvärdera lösningen
- utvärdera lösningen
- efterfråga en motivering av lösningen
- motivera lösningen
- acceptera och utveckla argument för lösningen

Ovanstående exempel illustrerar språkliga handlingar som kan förekomma i en dialog för att skärpa den argumenterande aktiviteten. Detta riktar uppmärksamheten mot elevernas förmåga att föra matematiska resonemang.

**Baxter, J., Woodward, J., Voorhies, J., & Wong, J. (2002). We Talk about It, But Do They Get It? *Learning Disabilities: Research & Practice*, 17(3), 173–185.**

Studien fokuserar på hur de matematiska samtalen i en klass förändras under en period på nio veckor. Fokus läggs också på lågpresterande elevers deltagande i gemensamma resonemang i matematik, och på hur den specialpedagogiska resursen kan användas i klassen för att skapa förutsättningar för elevernas deltagande.

### **Deltagare**

Elever i åk 4 samt deras lärare med 20 års erfarenhet. Tre av eleverna har presterat lågt på ett test i problemlösning och bedöms vara i behov av extra stöd. Även en specialpedagogisk resurs deltar.

### **Underlag**

Videoinspelningar av veckoliga diskussioner i helklass och ljudinspelningar av smågruppsdiskussioner, allt under en period av nio veckor. Även fältanteckningar och informella intervjuer med lärare och specialpedagogiska resursen ingår. Materialinsamlingen utförs under ordinarie undervisning i helklass.

### **Resultat**

Resultatet visar hur lärarens och elevernas matematiska samtal successivt ändrar karaktär från lärarcentrerade till mer elevcentrerade samtal. Läraren pratade visserligen fortfarande en stor del av tiden men karaktären på det läraren säger förändras: från att till stor del bestå i stöd för elevernas deltagande i resonemangen, till att uppmuntra eleverna till matematisk reflektion.

Resultatet visar också hur det specialpedagogiska stödet kan fungera i en inkluderande verksamhet, samt vilken betydelse det kan ha för elever i behov av extra stöd.

Resultatet visar hur det specialpedagogiska stödet hjälper elever i behov av extra stöd i det smågruppsarbete som föregår gruppernas presentationer i helklass. Stödet består bland annat i att involvera dem i diskussioner i grupperna och se till att de övar inför presentation i helklass. En elev i behov av särskilt stöd erbjuder sig exempelvis att göra gruppens redovisning. Det specialpedagogiska stödet i gruppdiskussionerna leder enligt forskarna till att eleverna (i behov av extra stöd) ges och tar ett större utrymme i de gemensamma diskussionerna, vilket innebär att de övar sin förmåga att resonera i större utsträckning än de skulle gjort annars.

**Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending Students' Mathematical Thinking during Whole-Group Discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(5), 355–374.**

Studien fokuserar på och benämner lärares handlingar vid tillfällen då lärare och elever resonerar på ett sätt som kan utöka elevernas begreppsliga förståelse, så kallade vidgande episoder (extending episodes).

### **Deltagare**

Elever från sex olika klasser, åk 1–6, samt sex lärare med 8–12 års erfarenhet av att undervisa på ett sätt som engagerar elever i att utforska matematiken. Lärarna har deltagit i fortbildning inom området.

### **Underlag**

Videoinspelningar av undervisningen vid så kallade vidgande episoder. Åtta tillfällen i sex olika klassrum. Materialinsamlingen utförs under ordinarie undervisning i helklass.

### **Resultat**

Resultatet visar vilka pedagogiska handlingar en lärare kan ägna sig åt för att stötta dialogen i klassrummet. Det handlar om att a) fånga upp elevernas tänkande (invitera), b) utveckla elevernas tänkande och c) stödja elevernas tänkande.

- Fånga upp elevernas tänkande (Eliciting actions)  
Med dessa handlingar inviterar läraren eleverna att dela med sig av sina idéer. Det ger läraren en möjlighet att uppfatta hur eleverna tänker.
- Utveckla elevernas tänkande (Extending actions)  
Utvecklande handlingar hjälper eleverna att gå vidare från den initiala aktiviteten. Läraren inviterar eleverna att:
  - utvärdera ett påstående
  - erbjuda skäl för påstående
  - jämföra olika metoder
  - använda samma metod på ett annat problem
  - föreslå andra sätt att tänka och lösa problemen.
- Stödja elevernas tänkande (Supporting actions)  
Stödjande handlingar hjälper eleverna bland annat att gemensamt reflektera kring det som diskuteras, påminnas om vad de redan kan, relatera det till ny information och hålla fokus på det som diskuteras. Det är handlingar i vilka läraren:
  - föreslår en tolkning av påståendet som stöttar upp vad som sagts
  - påminner eleverna om målet med diskussionen
  - upprepar ett påstående
  - introducerar andra representationer/sammanhang.

**Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions-a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 281–304.**

Studien fokuserar på lärares handlingar och kategoriserar och benämner dem i förhållande till hur lärarna använder och inte använder elevers yttranden (förslag, svar, frågor) för att engagera eleverna i matematiken.

### **Deltagare**

Elever i årskurs 5–7 samt fem lärare som skiljer sig i kunskaper och föreställningar om lärande. De är utvalda bland 365 lärare som svarat på frågor i ett test.

### **Underlag**

Videoinspelningar av fem lärares samtliga ordinarie matematiklektioner i helklass under en vecka. Lärarna bär mikrofon.

### **Resultat**

Drageset bidrar med begrepp som gör det möjligt att beskriva lärares undervisning i helklass på ett nyanserat sätt. Forskaren identifierar tre pedagogiska handlingar vilka fyller olika funktioner i klassrummet: a) omriktande handlingar (redirecting actions), b) stöttande/fortskridande handlingar (progressing actions) och c) fokuserande handlingar (focusing actions).

#### Omriktande handlingar

- Korrigeringar (implicita och explicita korrigeringar) (a)
- Föreslår andra strategier (b)
- Korrigerande frågor (c)

#### Stöttande/fortskridande handlingar

- Demonstrationer (synliggöra detaljer) (d)
- Förenklingar (e)
- Fokuserad stöttning (kan vara lotsning) (f)
- Inviterande frågor (försök att fånga in elevernas tänkande) (g)

#### Fokuserande handlingar

- Be eleverna ge detaljer (h)
- Be eleverna motivera (i)
- Be eleverna tillämpa sin kunskap på liknande problem (j)
- Be elever att utvärdera en annans elevs lösning (k)
- Läraren sammanfattar (l)
- Läraren uppmärksammar (m)

Ovanstående handlingar kan sägas utgå från olika undervisningskulturer där en del av dem är mer lärarcentrerade (a-f+l-m), medan andra är mer elevcentrerade (g-k). Författaren argumenterar för att båda dessa typer av pedagogiska handlingarna fyller ett syfte i undervisningen.

**Elbers, E. (2003). Classroom Interaction as Reflection: Learning and Teaching Mathematics in a Community of Inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 77–99.**

Studien fokuserar på utvecklandet av gemensam kunskap (common knowledge) i lärares och elevers gemensamma resonemang och på hur läraren stödjer detta.

### **Deltagare**

Elever i åk 8, deras lärare samt en forskare.

### **Underlag**

Videoinspelning av en lektion. Lektionen ingår i en serie av experimentlektioner i vilka läraren och forskaren samarbetar.

### **Resultat**

Elbers ger exempel på hur lärare kan få med elever i problemlösningsverksamhet som innebär att de tillsammans utvecklar ny kunskap.

Resultatet visar hur läraren skapar en atmosfär av ömsesidigt förtroende i vilken eleverna arbetar tillsammans utan rädsla för att misslyckas. Elevernas idéer ges utrymme, snarare än att de håller sig till det som står i läroboken. Problemlösningsaktiviteten gör det möjligt för eleverna att formulera sina egna frågor och besvara dem och därmed skapa matematiska resonemang i vilka de tillsammans validerar sina påståenden.

Läraren utgår från tre principer i sin undervisning: a) läraren stimulerar eleverna att finna och variera sina lösningar, b) läraren ger allmänna generella förslag, c) läraren ber endast de elever som först blivit tillfrågade om de vill redovisa inför hela klassen. Genom att följa dessa principer kan läraren styra diskussionen samtidigt som läraren får inblick i hur eleverna tänker. Princip a och c kan syfta till att skapa trygghet och ge en bild av att matematik inte är något fast utan att det finns en variation i vad som kan vara bra lösningar.

Ytterligare en strategi som används i undervisningen är att eleverna ska se sig själva som forskare. Lärare och elever inleder med att bestämma att undervisningen ska präglas av utredning: "Vi är forskare, låt oss göra forskning!" Eleverna är då med på tanken att problemet var föremål för forskning (ofta med hänvisning till exempel från vardagen, ett tidningsurklipp, ett fotografi, etc.). Läraren tar rollen som senior forskare, snarare än lärare. Denna roll gör det möjligt för läraren att delta i diskussionen själv. Ibland på ett provocerande sätt, genom att ta fram eller försvara olika och oförenliga hypoteser. Eleverna talar om sina nya identiteter och sina skyldigheter som medlemmar av en utredargemenskap. De kritiserar varandra när någon faller tillbaka till "gamla" vanor och beteenden.

Elbers betonar att om aktiviteten ska fungera som en gemenskap så är det tanken som räknas, inte i första hand *vad* som kommer upp. Det handlar väldigt mycket om att skapa ett klimat där alla känner trygghet och vill bidra.

**Elbers, E., & Streefland, L. (2000). Collaborative Learning and the Construction of Common Knowledge. *European Journal of Psychology of Education*, 15(4), 479–490.**

Studien fokuserar på utvecklandet av gemensam kunskap (common knowledge) i lärare och elevers gemensamma resonemang och på hur läraren stödjer det.

### **Deltagare**

Elever i en klass i åk 8 en lärare och en forskare.

### **Underlag**

Videoinspelningar av en lektion. Lektionen ingår i en serie av experimentlektioner i vilka läraren och forskaren samarbetar.

### **Resultat**

Elbers och Streefland ger exempel på hur läraren fångar upp och synliggör elevers matematiska idéer i helklass.

Resultatet visar att läraren genom att ställa frågor till eleverna fokuserar deras uppmärksamhet och skapar en möjlighet att synliggöra deras kunnande. Därmed konstrueras ett gemensamt sammanhang för presentation av ny information och för återkoppling.

Läraren tar rollen som senior forskare. Denna roll medför både möjligheter och svårigheter att hjälpa eleverna att utveckla sina argument. I lärarens roll som senior forskare utkristalliseras två typer av handlingar (diskursiva mönster) som läraren använder för att styra de gemensamma resonemangen:

1. Läraren använder ”konstruktiv rekapitulation (omformulering)”. Det vill säga läraren upprepar delar av det eleverna hade sagt. Det sker inte på ett bokstavligt sätt utan genom att läraren omformulerar det eleven uttryckt till en mer matematiskt korrekt utsaga, vilket kan innebära att ta bort eventuella fel eller felaktig begreppsanvändning.
2. Läraren riktar uppmärksamheten mot särskilda uttalanden, vilka behöver diskuteras och undersökas mer.

Rollen som senior forskare innebär också restriktioner för läraren. Läraren är ovillig att öppna korrigerade eleverna på grund av deras status som "unga forskare". Denna status gör det nödvändigt för lärare att acceptera vissa av elevernas idéer, även om de är fel. Detta leder ibland till förvirring.

Lärarnas införande av de nya rollerna (som forskare) skapar ett sammanhang där eleverna utvecklar och använder nya mönster i sina samtal och för sitt samarbete.

**Franke, M. L., Turrour, A. C., Webb, N. M., Ing, M., Wong, J., Shin, N., & Fernandez, C. (2015). Student engagement with others' mathematical ideas: The role of teacher invitation and support moves. *The Elementary School Journal*, 116(1), 1–23.**

Studien fokuserar på samband mellan lärares olika handlingar och nivån på elevernas engagemang i andra elevers idéer. Forskarna skiljer mellan inviterande och uppföljande handlingar.

### **Deltagare**

Elever i tolv klasser i årskurserna F–5 samt tolv lärare. Elevpopulationen i skolan representerar den etniska och socioekonomiska mångfalden i Kaliforniens skolor (stratifierat intag). Skolan tillämpar frågeinriktade arbetsätt, vilket innebär att lärarna uppmuntrar eleverna att ställa frågor och samarbeta med varandra vid lärande.

### **Underlag**

Video- och ljudinspelningar under ett läsår där två till tre lektionspass under ordinarie undervisning i helklass observeras under tvåveckorsperioder, ungefär en timme varje gång. Under det första halvåret observeras undervisningen veckovis, för att lära känna läraren och öva videoinspelning. Sedan utförs den formella datainsamlingen. Data samlas in från alla matematiklärare, totalt 12 klassrum.

### **Resultat**

Studien handlar om hur lärarna inviterar eleverna att bidra till samtalen på olika sätt, samt hur lärarna sedan stöttar eleverna i den fortsatta interaktionen. Resultatet visar att läraren använder sig av följande inviterande handlingar. Läraren ber eleverna

- förklara någon annans lösning
- diskutera olikheter i lösningarna
- ge förslag till en annan elevs idé
- försöka koppla sin egen idé till någon annans elevs idé
- hitta lösningar tillsammans med andra elever
- använda en lösning som delats av en annan elev.

När eleverna sedan är igång och diskuterar använder sig läraren av stöttande handlingar. Dessa handlingar är kategoriserade på tre sätt:

1. Inviterande/sonderande: läraren försöker få eleven att gå vidare genom att ställa frågor eller upprepa vad eleven har sagt med koppling till matematiken. Syftet är att eleven ska engagera sig i de andra elevernas matematiska idéer
2. Stöttande: läraren fångar upp en del av det matematiska innehållet genom att länka till en representation, en kontext eller en ide som diskuterats, ge information eller klargöra en idé
3. Fokuserande: läraren uppmärksammar elevernas lösningar och dess kopplingar till de matematiska idéer som har delats i helklass

Resultatet ligger i linje med tidigare forskning som föreslår att läraren ser bortom det första steget och förlänger sin interaktion med eleverna för att stödja lärandet. Resultatet tyder på att lärare inte kan förses med en enkel uppsättning handlingar utan valet av handlingar måste göras med utgångspunkt i elevernas matematiska idéer i rätt sammanhang och vid rätt tidpunkt.

**Henning, J. E., McKeny, T., Foley, G. D., & Balong, M. (2012). Mathematics Discussions by Design: Creating Opportunities for Purposeful Participation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(6), 453–479.**

Studien fokuserar på relationen mellan undervisningens utformning respektive lärares ledning och elevers deltagande i gemensamma resonemang i matematik.

### Deltagare

Elever i åk 7 samt en lärare. En klass med 21 elever med skilda kunskapsnivåer.

### Underlag

Utformningen av undervisningen är ett samarbete mellan en forskare och en lärare. Videospelningar vid nio tillfällen under en treveckorsperiod, 6x90 minuter och 3x45 minuter. Även reflektioner från läraren, lektionsplaneringar och tester samlas in.

### Resultat

Henning och kollegor skiljer på konvergent och divergent undervisning:

	<b>Konvergent</b>	<b>Divergent</b>
Läraryppmaningar	Slutna frågor	Öppna frågor
Elevrespons	Konvergent elevsvar	Divergent elevsvar
Läraryppföljning	Bekräfta och avvisa	Ledtråd/elaborera/formulera om/ förklara/ summera
Interaktion	Läraren pratar mer, läraren pratar med individuella elever	Elever pratar mer och med varandra

Resultatet visar att läraren använder olika slags handlingar för att invitera och stötta elevernas lärande.

- Inviterande handlingar: ställa frågor, lämna meningar oavslutade, låta eleverna svara
- Bekräftande handlingar: bekräftande uttryck (det är rätt), repetera för att uppmärksamma, avfärda (nej, det är inte rätt du måste tänka vidare på detta)
- Uppföljande handlingar: ge ledtråd/elaborera/formulera om/ förklara/ summera
- Icke ämnesrelaterade handlingar – om hur arbetet ska göras: verbala korrigeringar om eleverna riskerar att hamna från uppgiften, handlingar för att skapa relationer i interaktionen

Tre olika typer av diskussioner identifieras i skilda faser av ett undervisningsavsnitt:

- a. inviterande diskussion (framing discussion), vars syfte är att maximera elevernas deltagande
- b. begreppslig diskussion (conceptual discussion), vars syfte är att engagera eleverna i dialog så att de kan tillägna sig nya matematiska begrepp
- c. tillämpad diskussion (application discussion), vars syfte är att eleverna ska få möjlighet att tillämpa begrepp och därmed få en chans att befästa dem.

Resultatet visar att lärarens stöd och elevernas deltagande skiljer sig i de olika diskussionsformerna. Exempelvis är läraren mer delaktig i den begreppsliga diskussionen än i de två andra diskussionsformerna.



**Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(2), 81–116.**

Studien fokuserar hur en lärare tillsammans med sina elever under drygt sju månader, successivt skapar en undervisning med gemensamma samtal i matematik. Studien beskriver lärares och elevers förändrade roller gällande frågor, förklaringar, källor till matematiska idéer och ansvar för lärande.

### **Deltagare**

25 elever i åk 3 samt deras lärare som följt klassen från årskurs två till årskurs tre. Skolan är katolsk och belägen i ett arbetarklassområde. 98 procent av eleverna får stipendier/bidrag som betalar skolgången. De flesta eleverna har spanska som modersmål och pratar engelska som andraspråk. Läraren talar både spanska och engelska. Hon valdes ut (bland fyra lärare) eftersom hon förändrat sin undervisning mycket under skolåret: från en mycket traditionell undervisning till en fullt utvecklad samtalsgemenskap.

### **Underlag**

Huvudsakligen videoinspelningar av två lektioner i veckan från september till mitten av april.

Under studiens genomförande infördes en forskningsbaserad curriculum Children´s Maths Worlds som lärarna hämtade matematikuppgifter från. Läraren i studien fick stöd av forskarna för att förändra sin undervisning och genom detta stöd gick förändringen fort och kunde studeras. Läraren träffade andra lärare två gånger i månaden för att diskutera sin matematikundervisning.

### **Resultat**

Studien ger en förståelse av relationen mellan undervisningens utformning och elevernas deltagande/lärande.

Hufferd-Ackles och kollegor menar att det är svårare att förutse vart en lektion ska ta vägen när undervisningen är reforminriktad (= en undervisning med gemensamma utforskande samtal, snarare än lärardominerade samtal), och därmed är det svårare, eller mer ovant för läraren att förbereda sig. Författarna bidrar med ett ramverk som kan guida lärare mellan olika nivåer för lärares och elevers gemensamma resonemang i matematik. Detta ramverk redovisas i sin helhet i huvudrapporten.

Resultatet visar att för att hjälpa eleverna från nivå 0 till nivå 1 *inviterar* läraren eleverna. Fokus ligger på hur elever tänker och resonerar, snarare än på deras svar.

För att hjälpa eleverna från nivå 1 till nivå 2 *stöttar* läraren eleverna genom att be dem förklara, ställa öppna frågor och visa på olikheter i elevernas strategier.

För att hjälpa eleverna från nivå 2 till nivå 3 ger läraren *eleverna en större roll*. Läraren handleder eleverna i deras mer aktiva roller och uppmanar dem att hjälpa varandra. Läraren studerar eleverna från den bakre delen av klassrummet och ger stöd om det uppstår behov.

**Hunter, J. (2014). Developing Learning Environments Which Support Early Algebraic Reasoning: A Case from a New Zealand Primary Classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 659–682.**

Studien fokuserar en lärares handlingar som successivt förändrar elevers deltagande i matematiska samtal under en tremånadersperiod. Elevers deltagande beskrivs som en förändring från mest disputerande och kumulativa samtal, till mer utforskande samtal.

### **Deltagare**

Elever 9–11 år samt en erfaren lärare med intresse av att utveckla sin förmåga att föra algebraiska resonemang i klassrummet. Eleverna har blandad etnisk bakgrund, i huvudsak medelklassbakgrund. Ett skäl för val av lärare var att elever tidigare lärt sig mycket algebra genom lärarens undervisning.

### **Underlag**

17 videoinspelningar av ordinarie undervisning. Lektionerna är upplagda med inledande helklassintroduktion följt av grupparbete och avslutande helklassdiskussion. Läraren och forskaren analyserar data tillsammans och modifierar/utvecklar undervisning mot ett undersökande arbetssätt.

### **Resultat**

Hunter utgår från att elevers möjligheter att delta i gemensamma utforskande resonemang är av central betydelse för elevers lärande och nyckeln till elevers tidiga algebraiska resonemang. Gemensamma resonemang innefattar att ge förklaringar, motiveringar, representationer och generaliseringar.

Resultatet visar hur läraren guidar eleverna i att föra gemensamma resonemang i smågrupper, i större gruppkonstellationer och i helklass. Gradvis sker en insocialisering i utforskande arbetssätt i matematikklassrummet. Sociala och sociomatematiska normer är nyckelbegrepp i beskrivningen av insocialiseringen.

Centrala begrepp för att karakterisera de samtal som lärare och elever för är utforskande, disputerande och kumulativa samtal. Vare sig elevernas disputerande samtal eller kumulativa samtal engagerade eleverna i gemensamma resonemang. Efterhand ökar elevernas förmåga att resonera. Det innebär att de slutar använda disputerande samtal och i liten utsträckning håller sig till kumulativa samtal. Elevernas utforskande samtal ökar markant. Det innebär att de för samtal i vilka de undersöker om de är överens eller inte överens om lösningar. De frågar varandra om klargöranden och motiveringar. De bidrar med motiveringar och utvecklar generaliseringar. Lärarens huvudsakliga handlingar består i att ställa olika sorters frågor till eleverna.

Studien tar också upp att läraren använder tänketid som pedagogiskt verktyg, vilket gör det möjligt för eleverna att reflektera över egna och andras resonemang. Likaså använder läraren elevers felsvar i kombination med tänketid, på ett sätt som gör att elevernas begreppsliga resonemang fördjupas.

Läraren påminner eleverna ständigt om deras ansvar att respektera varandras inlägg. Läraren stöttar eleverna så att de använder en rad olika sätt att ställa och formulera frågor till varandra och att utmana varandra.

**Hunter, R. (2012). Coming to "Know" Mathematics through Being Scaffolded to "Talk and Do" Mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning***

Studien fokuserar en lärares (olika slags) stöttande handlingar och vad de innebär för elevers deltagande i matematiska resonemang.

**Deltagare**

Elever i åk 4–8 (8–11 år) samt en lärare. Flertalet av eleverna är lågpresterande och många kommer från hem med låg socioekonomisk nivå. Flertalet elever tillhör en etnisk minoritet (maorier). Materialet ingår i en större studie som inbegriper fyra lärare och 120 elever. Alla lärarna är så kallade "expert teachers" med minst 5 års undervisningserfarenhet. De har också deltagit i en fortbildningsinsats.

**Underlag**

Videoinspelningar och ljudupptagningar av två matematiklektioner genomförda av en och samma lärare. Den ena observerade lektionen ägde rum i studiens inledning och den andra i slutet.

**Resultat**

Studien handlar om elevers ömsesidiga engagemang och kollektiva resonering i planerade aktiviteter. Speciellt fokus ligger på begreppet stöttning, och studien tar upp två olika sätt att se på detta: som ett verktyg *för* resultat, och som verktyg *och* resultat.

Resultatet visar att när stöttningen är starkt kontrollerad (verktyg för resultat) blir såväl elevernas och lärarnas roller begränsade liksom matematikdiskussionerna. Läraren får en expertroll och blir den som visar och berättar, mer än stöttar elevernas resonemang. När stöttningen i stället innefattar undersökningar och bredare dimensioner av bekräftelse (verktyg och resultat), stärktes lärandet för samtliga deltagare. Hunter konstaterar att lärare behöver känna till hur man kan undervisa men också hur deras elever lär.

**Kazemi, E., & Stipek, D. (2008). Promoting Conceptual Thinking in Four Upper-Elementary Mathematics Classrooms. *Journal of Education*, 189(1), 123–137.**

Studien fokuserar kvaliteten på lärares och elevers gemensamma matematiska resonemang i fyra olika klasser som undervisas av två olika lärare. Studien visar att samtalens kvalitet skiljer sig, på så vis att samtalen i två av klasserna handlar om det matematiska innehållet, medan det i de två övriga klasserna rör sig på en mer ytlig nivå.

### **Deltagare**

Elever i åk 4 och 5 och fyra lärare. En hög andel av eleverna är från låginkomstfamiljer. Alla lärare har erfarenhet av implementering av reforminriktad undervisning. De är välutbildade och tre av dem har minst 17 års erfarenhet.

### **Underlag**

Videoinspelningar av totalt åtta lektioner där två lektioner per lärare filmas under två dagar. Alla lärare undervisar med samma lektionsupplägg och lektionsinnehåll. Studien ingår i ett större forskningsprojekt om reforminriktad undervisning i matematik.

### **Resultat**

Studien handlar om hur klassrumsdialoger kan främja begreppsligt lärande i matematik. Forskarna skiljer i sin analys av interaktionen mellan sociala normer och sociomatematiska normer. Sociala normer refererar till de generella sätt elever deltar på i klassrumsaktiviteter, medan sociomatematiska normer är specifika för elevers matematiska aktiviteter. Exempelvis, att elever förväntas förklara sina lösningar och sätt att tänka är en social norm, medan vad som ses som en acceptabel matematisk förklaring är en sociomatematisk norm. Studien visar hur normerna verkar, dock inte hur de etableras.

I studien ingår fyra lärare med varsin klass. Resultatet visar att i samtliga fyra klassrum råder sociala normer för att beskriva och dela strategier, acceptera misstag som en naturlig del i lärande och att arbeta tillsammans med andra elever i klassen. Dock visar sig skillnader i kvalitet på elevernas engagemang i matematiken i de olika klassrummen. De dialoger som antas främja begreppsligt lärande kännetecknas av följande sociomatematiska normer:

1. En förklaring består av ett matematiskt argument inte bara en procedurell beskrivning
2. Matematiskt tänkande innebär att förstå relationer strategier
3. Felsvar ger möjlighet till att omtolka ett problem, utforska motsägelser och utforska alternativa strategier
4. Samarbete omfattar individuellt ansvar och att komma överens genom matematisk argumentation

**Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding Norms of Argumentation-Based Inquiry in a Primary Mathematics Classroom. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 47(7), 1107–1120.**

Studien fokuserar hur lärare stödjer elevers successivt förändrade deltagande i gemensamma samtal i matematik. Lärarens stöd sker i förhållande till vissa normer för samtalen, exempelvis att man delar med sig av ofullständiga idéer och att man bygger på varandras idéer.

### **Deltagare**

En lärare och 26 elever i åk 4. Varierande kunskapsnivå hos eleverna och flera av dem fick extra stöd. Läraren var erfaren och hade undervisat i undersökande matematik i drygt sex år. Läraren valdes eftersom hon var speciellt intresserad av att stötta utvecklandet av normer för undersökande arbetssätt.

### **Underlag**

Videoinspelningar av 17 lektioner från mars till november 2014. Data i studien kommer från en större studie som inbegriper tre lärare och pågår under tre år.

### **Resultat**

Studien handlar om hur läraren kan stödja utvecklandet av en utforskande klassrumsdialog (argumentation based inquiry). Läraren lägger fokus på att eleverna ska utveckla: 1) aktivt lyssnande 2) motivera och förklara för sina klasskamrater 3) intellektuellt risktagande: uttrycka ofullständiga idéer /ifrågasätta och utmana idéer och 4) bygga på andras idéer. En strategi läraren använder är att lista det som karakteriserar den praktik läraren avser att skapa. På affischer skriver läraren upp sina förväntningar på samtalen med roller för lyssnaren, talaren och alla gruppmedlemmar:

- a. Aktiva lyssnare (reflektera över andras idéer)
- b. Tydliga hörbara talare
- c. "Aktiva contributors" (att elever bidrar)

Läraren skriver också upp sina förväntningar på elevernas samarbete:

- d. Det är möjligt att använda mer än en metod och ändå nå en konklusion
- e. Alla idéer och åsikter är viktiga
- f. Alla förväntas tänka
- g. Idéer kan ifrågasättas eller utmanas respektfullt

Läraren använder det som står på dessa posters för att återkommande förstärka positivt beteende hos eleverna. Forskarna kommenterar att utvecklandet av normer tar tid och kräver kontinuerligt stöd. En annan strategi för att stödja elevers frågor till sina klasskamrater är att läraren listar exempel på ett antal frågor:

- Tänkte du på?
- Jag håller med/håller inte med
- Bygg på denna idé
- Berätta mer om...
- Kan du bevisa detta för oss?
- Dina bevis...
- Vad övertygade dig om att detta var svaret?

I studien framhålls att det är viktigt att eleverna vågar ta risker och dela med sig av ofullständiga idéer och felaktiga svar. Här spelar lärarens stöd en viktig roll och studien går in på hur det stödet ser ut.

**McCrone, S. S. (2005). The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 7(2), 111–133.**

Studien fokuserar den successiva utvecklingen av gemensamma matematiska diskussioner i en klass under ett halvår och lyfter fram lärarens och elevernas förändrade roller.

### **Deltagare**

Elever i åk 5 och en lärare. De flesta elever är från medelinkomstfamiljer och få har utländsk bakgrund. Läraren har för avsikt att utveckla matematiska diskussioner och har deltagit i fortbildning tre år före studien. Läraren är erfaren men anser sig svag i matematik.

### **Underlag**

Videoinspelningar, ljudinspelningar, fältanteckningar och elevarbeten samlas in under sex månader. Ljudinspelningar av klassrumssamtal utförs dagligen och videoinspelningar görs en gång i veckan.

### **Resultat**

Resultatet visar att elevernas matematiska diskussioner utvecklas och fördjupas efterhand. Förändringar i elevers deltagande innebär att de går från deltagande i resonemangen i begränsad utsträckning till aktiva kritiska deltagare som använder andras idéer för att utveckla nya hypoteser.

Dessa förändringar sker parallellt med förändringar i lärarens roll i klassrummet och de frågor läraren ställer. Läraren går från att ställa resultatnriktade frågor (Vad gjorde du sedan? eller Vad kom du och din kamrat fram till?) till strukturorienterade frågor (Hur kan du använda division i det som du säger är ett problem om subtraktion?) och senare även teoriorienterade frågor (Hur vet du när det finns ett mönster?).

Lärarens roll och förändringar i den kan sammanfattas i följande punkter:

- lärare stödjer elevers resonemang genom de frågor som ställs
- lärare går från att prata mycket till att låta eleverna prata mer
- lärare går från att dominera samtalen till att underlätta elevernas deltagande

**Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching Children How to Use Language to Solve Maths Problems. *Language and Education*, 20(6), 507–528.**

Studien fokuserar på lärares och elevers användande av undervisningsprogrammet Thinking together. Programmet innehåller tolv detaljerade lektionsplaneringar och följer grundreglerna för så kallade utforskande samtal.

### **Deltagare**

Ca 230 elever i åk 5 och fjorton lärare. I experimentgruppen, det vill säga den grupp elever som undervisas med Thinking together deltar 109 elever och i kontrollgruppen deltar 121 elever. Eleverna i kontrollgruppen är utvalda från en annan skola.

### **Underlag**

Data samlades in under totalt 12 lektioner inom ramen för undervisningsprogrammet. Videoinspelningar och intervjuer görs både före och efter interventionen. Utöver detta provas elevernas kunskaper i matematik genom matematiktest före och efter interventionen.

### **Resultat**

Undersökningen/utvärderingen av undervisningsprogrammet Thinking together består i:

1. En utvärdering av elevers kunskaper och förståelse av matematikinnehållet efter tillämpning av programmet – jämförelse mellan försöksklasser och kontrollgrupper (kvantitativ analys)
2. Analys av lärarens roll i arbetet med undervisningsprogrammet – exempelvis jämförelse av två lärares undervisning (lärare A och lärare B) (kvalitativ analys)
3. Analys av samtal mellan elever i arbetet med undervisningsprogrammet – exempelvis jämförelse mellan elevers samtal i två klasser (lärare A:s och lärare B:s klasser) (kvalitativ analys)

Undervisningsprogrammet Thinking together innehåller tolv detaljerade lektionsplaneringar. Alla lektioner följer samma mönster: först lärarledd undervisning i helklass, därefter gruppdiskussioner och avslutningsvis diskussioner i helklass. Detta mönster liknar EPA (Enskilt, Par, Alla), som under senare år har spridit sig i Sverige. De första fem lektionerna i undervisningsprogrammet har fokus på hur samtal kan användas för att samarbeta kring det matematiska innehållet. De syftar till att etablera en uppsättning ”grundregler” för ”utforskande samtal”. Grundreglerna är följande:

1. all relevant information delas
2. alla deltagare i en grupp inbjuds att bidra till diskussionen
3. åsikter och idéer respekteras och beaktas
4. alla uppmanas att klargöra sina skäl
5. utmaningar och alternativ görs tydliga och förhandlas
6. gruppen försöker nå enighet innan de tar beslut och agerar

De efterföljande sju lektionerna utformas för att eleverna ska använda utforskande samtal om ett matematiskt innehåll.

Resultaten visar att:

- 1) eleverna i försöksklasserna förbättrade sina resultat mer än kontrollklasserna. Detta ger stöd för att interventionen var effektiv i att förbättra elevers studier i matematik. Effektstorlek 0.59.
- 2) lärare A för i huvudsak en monolog på så vis att det saknas samspel mellan lärare och elever. Frågor används inte för att locka fram motiveringar eller utforska elevernas idéer. Inte ens då läraren ställer frågor om elevernas uppfattningar ges utrymme för eleverna att svara, utan läraren svarar själv. Lärare B däremot agerar enligt några av grundreglerna för utforskande samtal. Hon initierar en diskussion om elevernas idéer, ifrågasätter förslag från elever, och ber dem motivera sina förslag. Lärare B använder inte bara frågor för att ta reda på elevers kunskap eller rätta dem, utan för att engagera dem i problemet och försäkra sig om att deras uppfattningar representeras i dialogen.
- 3) eleverna i lärare A:s klassrum samarbetar inte utan agerar individuellt. De för olika resonemang utan att mötas. De uppmärksammar inte varandras förslag och kommer inte överens om hur de ska gå vidare. Eleverna i lärare B:s klassrum däremot samarbetar bra. Gruppen engagerar sig i varandras idéer och samarbetar för att skapa och testa hypoteser. De ser till att vara överens.

En av eleverna i lärare B:s klassrum har haft inlärningssvårigheter och det har tidigare inte fungerat bra för honom att delta i gruppaktiviteter. Här är han dock inkluderad.

Studien tar upp att samspel mellan elever sker mer symmetriskt, än vid lärarledd interaktion. Vidare att läraren är en förebild. Kvaliteten i elevernas resonemang varierar, och kan förbättras genom lärarens guidning.



**Parks (2011) Diversity of practice within one mathematic classroom.  
Pedagogies: An international journal. 216–233.**

Studien fokuserar skillnader i enskilda elevers deltagande inom ramen för tre olika arbetssätt i matematikundervisningen, varav ett är matematiska diskussioner. De två övriga är lekövningar och gruppdiskussioner.

**Deltagare**

Elever i åk 3 och en lärare. Många av eleverna har en annan bakgrund än europeisk eller amerikansk och en stor del av eleverna lever i sådana ekonomiska hemförhållanden att de sponsras med lunch. Läraren har mycket erfarenhet (30 år) och rekommenderades av andra som en reformorienterad lärare.

**Underlag**

Studien är en etnografisk studie. Detaljerade fältanteckningar, elevers arbeten, inspelade samtal, lärarens lektionsplaneringar och intervjuer med läraren samlas in från september till april.

**Resultat**

Parks undersöker på vilka sätt olika arbetssätt (här kallade undervisningsgenrer) innebär möjligheter eller hinder för elevers deltagande i samspelet. Ett av arbetssätten är matematiska diskussioner, och de två övriga är lekövningar och smågruppsarbete.

Resultatet visar att eleverna känner sig mer eller mindre ”hemma” i olika arbetssätt och ”väljer” att engagera sig i vissa och inte i andra. Annorlunda uttryckt kan det sägas att elevernas kompetens skiljer sig i de olika arbetssätten; en elev kan visa sig kompetent i ett arbetssätt och mindre kompetent i ett annat arbetssätt.

1) *matematiska diskussioner* handlar om att undersöka och upptäcka nya matematiska fenomen och samband. Läraren ställer öppna frågor och utmanar elevers svar genom att be dem förklara, ge motexempel, uppmuntra eleverna att samtala med varandra, erbjuda utmanande och intressanta matematiska problem och ställa utmanande frågor.

2) *lekövningar* handlar om att uttrycka vad man redan kan och inte att undersöka nya matematiska fenomen. En form av färdighetsträning. Eleverna skall muntligt svara på lärarens frågor snabbt, kortfattat och korrekt. Eleverna ska recitera eller svara på slutna frågor.

3) *smågruppsarbete* handlar om att lösa matematiska problem i smågrupper. Eleverna ställer frågor till varandra. Mer informella normer än i de två ovan beskrivna genrer. Ofta används fysiska material. I smågruppsarbetet kan inte enskilda elever ”gömma sig” vilket kan hända i de två ovan beskrivna genrer.

Parks menar att lärare behöver aktivera elever i olika arbetssätt för att alla elever ska få tillfälle att engagera sig i matematik. Men betonar samtidigt att alla elever behöver få lära sig att föra matematiska resonemang i en större grupp. Det ska också sägas att de arbetssätt som Parks valt att fokusera på i denna studie bara är ett urval av de som förekommer i det observerade klassrummet. Övriga arbetssätt var individuellt arbete, skrivarbete, förhör, presentation av arbeten för andra elever, kommunikation mellan enskild elev-lärare, matematiska spel och olika former av prov.

**Radford, L., & Roth, W.-M. (2011). Intercorporeality and Ethical Commitment: An Activity Perspective on Classroom Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 227–245.**

Studien beskriver hur elevers gemensamma resonering vid lösningen av ett matematiskt problem ser ut, och hur läraren med utgångspunkt i elevernas resonemang utvecklar detta till att omfatta matematiska uttrycksformer.

**Deltagare**

Elever i åk 4 och deras lärare och en forskare.

**Underlag**

Transkriberade dialoger mellan elever och mellan elever och lärare presenteras utförligt och i kombination med bilder.

**Resultat**

Studien handlar om att praktiska lärandeaktiviteter erbjuder utrymme för elevers arbete tillsammans (space of joint action) och varför lärarens involvering i arbetet (togetherness) också behövs.

Resultatet visar hur läraren kan stödja elevers lärande i gemensamma resonemang, utan att fördenskill dominera och ta över samtalet. En central poäng i studien är att lärarens stöd behövs för att eleverna ska förstå den matematiska formel som lektionen handlar om ( $2n+1$ ). Eleverna kommer i den egna aktiviteten fram till att de kan använda en dubbleringsstrategi för att räkna ut svar på uppgiften (hur mycket ett barn har sparat i slutet av vecka 5, 10 och 25). Eleverna kommer dock inte på egen hand fram till den algebraiska formel som går att tillämpa på samtliga veckor, det vill säga en generalisering av resonemanget. Studien visar hur läraren guidar eleverna till denna förståelse med utgångspunkt i elevernas resonemang.

Begreppet *space of joint action* avser en kollektiv form för tanke och medvetande där tal, kroppsställningar, gester, artefakter, symboler och gemensamma uppfattningar etc. ingår.

Begreppet *togetherness* används för att fånga den gemensamma praktiska verksamheten/aktiviteten som också involverar läraren och som har till syfte att förverkliga ett gemensamt motiverat mål med aktiviteten. Målet känner läraren till bättre än eleverna. Elever och lärare är "tilldelade" olika roller i interaktioner i klassrum.

**Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C. H., Shin, N., & Turrour, A. C. (2014). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. *International Journal of Educational Research*, 63, 79–93.**

Studien fokuserar två olika dimensioner av elevers deltagande i gemensamma matematiska resonemang: att förklara sina egna idéer och att engagera sig i andras idéer. Studien beskriver även lärares handlingar för att stödja elevers engagemang i andra elevers idéer och den visar hur lärare i samtal med elever kan främja olika grader av elevengagemang i andra elevers idéer.

### **Deltagare**

Sex klasser i åk 3 och 4 och sex lärare. Elevpopulation representerar den etniska och socioekonomiska mångfalden i Kaliforniens skolor (stratifierat intag). Skolan har som mål att arbeta med problemlösning och matematiska diskussioner.

### **Underlag**

Videoinspelningar av helklass- och gruppdiskussioner utförs under läsåret 2008–2009 under den ordinarie undervisning. Under det första halvåret observeras undervisningen veckovis, för att lära känna läraren och öva videoinspelning. Sedan utförs den formella datainsamlingen.

### **Resultat**

Studiens syfte är att utvidga tidigare forskning om elevers deltagande i matematikundervisningen, genom att undersöka två dimensioner av elevers deltagande 1) att förklara egna idéer, och 2) att ta del av och engagera sig i andra elevers idéer. Dessutom undersöks hur elevernas deltagande relaterar till deras resultat på test. Den typ av resonemang författarna avser, exemplifieras med begreppet utforskande samtal, som också jämförs med disputerande och kumulativa samtal.

Forskarna karaktäriserar elevers engagemang i andra elevers matematiska idéer i termer av olika grad av elevengagemang, likaså beskrivs olika detaljnivåer i elevers förklaringar.

Resultatet visar att de elever som ger mer kompletta och flerdimensionella svar i de gemensamma resonemangen, också når högre resultat. Även mellan graden av elevers engagemang i andra elevers idéer finns ett positivt samband med deras resultat: högre grad av engagemang samvarierar med högre resultat. Studien visar att av störst betydelse för elevers resultat är att eleverna engagerar sig i andra elevers idéer. Det räcker alltså inte med att eleven uttrycker sina egna idéer. Detta antyder att det behövs en mer nyanserad bild av synen på elevers deltagande.

Det räcker heller inte med att eleverna delar idéer mellan varandra för att de ska nå höga resultat, idéerna måste delas på en avancerad nivå. Delning på en avancerad nivå kan innebära att en elev lägger till detaljer till en annan elevs idé/lösning eller att en elev föreslår ett "korrekt" svar på en annan elevs felaktiga svar. Det kan också innebära att en elev ger inkorrekta detaljer på en föreslagen korrekt lösning eller att man arbetar tillsammans för att hitta en lösning.

Resultatet visar också att lärares stöd för elevers engagemang kan leda till varierande grad av elevdeltagande, och det framgår att det är viktigt att lärare följer upp de initiala frågor elever ställer när de jämför sina idéer.